ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2002, том 383, № 2, с. 175–178

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ $y' = x + y^2$ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЭЙРИ

 А. М. Молчанов

Представлено академиком Т.М. Энеевым 15.02.2001 г.

Поступило 27.07.2001 г.

ВВЕДЕНИЕ. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Общее уравнение Риккати [1]

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

допускает простой итерационный процесс. Полагая

$$y = u + y_1$$

и определяя u из линейного уравнения

$$u' = a + bu,$$

получаем для невязки y_1 снова общее уравнение Риккати

$$y' = a_1 + b_1y_1 + c_1y_1^2$$

с новыми коэффициентами, зависящими, конечно, от независимого переменного x:

$$a_1(x) = c(x)u^2(x),$$

$$b_1(x) = b(x) + 2c(x)u(x),$$

$$c_1(x) = c(x).$$

В дальнейшем зависимость от независимого переменного x явно не указывается.

Повторяя этот процесс, мы получим ряд для решения y с остаточным членом y_n

$$y = u + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + y_n.$$

Члены этого ряда суть решения линейных уравнений

$$u' = a_n + b_nu_n.$$

Коэффициенты уравнений вычисляются рекуррентно по формулам

$$a_{n+1} = cu_n^2,$$

$$b_{n+1} = b_n + 2cu_n.$$

Институт математических проблем биологии Российской Академии наук, Пущино Московской обл.

Простота перехода $n \to n + 1$ – важная особенность полученного формального ряда. Цена такой простоты – необходимость решать на каждом шаге линейное дифференциальное уравнение. Понятно поэтому, что вычислительно вся процедура ориентирована на современные компьютеры.

Лемма (об ограниченном решении). *Если в линейном уравнении с комплексными коэффициентами*

$$u' = a(x) + b(x)u,$$

коэффициент $a(x)$ ограничен,

$$|a(x)| \le a,$$

а коэффициент $b(x)$ лежит в правой полуплоскости,

$$\mathrm{Re}\{b(x)\} \ge p > 0,$$

то это уравнение имеет частное решение

$$u(x) = -\int_x^\infty a(s)\exp\left\{-\int_x^s b(r)dr\right\}ds,$$

ограниченное на всей оси,

$$|u(x)| \le u = \frac{a}{p}.$$

Равенство достигается для постоянных коэффициентов $a(x)$, $b(x)$ и только для них. Найденное ограниченное решение единственно. Любое другое решение неограниченно при $x \to \infty$.

Достаточные условия сходимости легко получаются, если на каждом шаге оценить два положительных числа:

$$a_n = \max_x|a_n(x)|, \quad p_n = \min_x\mathrm{Re}\{b_n(x)\}.$$

Из рекуррентных формул и оценки для $u_n(x)$

$$|u_n(x)| \le \frac{a_n}{p_n}$$

нетрудно получить неравенства

$$a_{n+1} \le c\left(\frac{a_n}{p_n}\right)^2, \quad p_{n+1} \ge p_n - \frac{2a_nc}{p_n}.$$

Введение безразмерного параметра θ_n,

$$\theta_n = \frac{4a_n c}{p_n^2},$$

делает значительно нагляднее эту цепочку неравенств:

$$\theta_{n+1} \le \left(\frac{\theta_n}{2-\theta_n}\right)^2,$$

$$a_{n+1} \le \frac{\theta_n}{4} a_n,$$

$$p_{n+1} \ge \left(1 - \frac{\theta_n}{2}\right) p_n.$$

Неравенство для θ порождает счетное множество достаточных условий сходимости. В самом деле, если

$$\theta_n \le 1,$$

тогда и следующие θ_{n+1} и все последующие θ_{n+k} удовлетворяют такому же неравенству

$$\theta_{n+k} \le 1.$$

Следовательно, начиная с достаточно большого n,

$$|u_n(x)| \le \frac{1}{2^n} u$$

и ряд сходится быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$.

Но если справедливо строгое неравенство

$$\theta_n < 1,$$

то сходимость существенно лучше и совпадает с ньютоновской сходимостью – удвоение числа верных знаков на каждом шаге. Проведенное рассмотрение допускает обобщение на уравнение

$$my' = a + by + y^2.$$

Это уравнение отличается от разобранного выше положительным множителем m перед производной y', что равнозначно изменению переменного x. Поэтому найденные выше условия сходимости итерационного процесса сохраняются и для этого уравнения в терминах свойств функций $a(x)$, $b(x)$, $p(x)$

$$a_n = \max_x |a_n(x)|, \quad p_n = \min_x \mathrm{Re}\{b_n(x)\}.$$

Для постоянных коэффициентов процесс сходится к корню квадратного уравнения

$$a + by + y^2 = 0.$$

Члены ряда вычисляются точно при любом n:

$$u_n = -\frac{a_n}{b_n},$$

и мы получаем цепочку рекуррентных формул

$$a_{n+1} = c_n\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{2a_n c_n}{b_n}, \quad c_{n+1} = c_n$$

для решения квадратного уравнения. Введя безразмерный (на этот раз комплексный параметр) $\theta_n = \dfrac{4a_n c}{b_n^2}$, снова получаем для θ_n одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = \left(\frac{\theta_n}{2-\theta_n}\right)^2,$$

гарантирующее быструю сходимость ряда для корня, если выполнено условие

$$|\theta| = \vartheta < 1.$$

Реальная область сходимости больше, конечно, чем область, определяемая нулевым достаточным условием. Так, например, для уравнения

$$y^2 + y - 1 = 0,$$

определяющего золотое сечение, имеем

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = 1,$$

и нулевое достаточное условие сходимости не выполнено, так как

$$\theta = \frac{4ac}{b^2} = -4,$$

Тем не менее уже на первом шаге мы попадаем внутрь единичного круга

$$\theta_1 = 0.444444444,$$

где выполнено первое достаточное условие сходимости и дальнейшие итерации быстро убывают:

$$\theta_2 = 0.081632888,$$

$$\theta_3 = 0.001810774,$$

$$\theta_4 = 0.000002050,$$

$$\theta_5 = 0.000000000.$$

ПОСТРОЕНИЕ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Уравнение Эйри

$$\psi'' + x\psi = 0$$

заменой переменных

$$S = -\frac{\psi'}{\psi},$$

восходящей к D'Alembert Jean Le Rond [2], приводится к уравнению Риккати

$$S' = x + S^2.$$

В этой форме уравнение представляет наихудший случай для построения итерационного процесса. В нем отсутствует линейный член и, следовательно, формально говоря, $\theta = \infty$. Приходится поэтому произвести еще одну замену переменных

$$S = q + \frac{1}{m}y$$

с произвольной (комплексной) функцией q и положительной функцией m

$$my' = a + by + y^2.$$

Коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются выбором нулевого приближения $q(x)$ и произвольной положительной функции $m(x)$:

$$a(x) = m^2(x + q^2 - q'), \quad b(x) = 2mq + m';$$

ключевой момент – это выбор нулевого приближения $q(x)$. Наиболее удачной оказалась идея, восходящая к Эйлеру – параметрическое задание $q(x)$ в комплексной плоскости z:

$$x = -z^2 + \frac{A}{z}, \quad q = z + \frac{B}{z^2}.$$

После несложных, хотя и громоздких выкладок получаем

$$a(x) = m^2 \times$$
$$\times\left[B^2 z^{-4} + \frac{A^2 + 2BA - 2B + (2A + 4B + 1)z^3}{z(2z^3 + A)}\right],$$

$$b(x) = 2m\left(z + \frac{B}{z^2}\right) + m'.$$

Можно существенно уменьшить $a(x)$, если второе слагаемое принять равным нулю. Это приводит к двум уравнениям

$$A^2 + 2BA - 2B = 0, \quad 2A + 4B + 1 = 0.$$

Система уравнений для параметра A и B имеет решение

$$A = -1, \quad B = 1/4.$$

Поэтому окончательно

$$x = -z^2 - \frac{1}{z}, \quad q = z + \frac{1}{4z^2},$$

$$a(x) = \frac{m^2}{16z^4},$$

$$b(x) = 2m\left(z + \frac{1}{4z^2}\right) + m',$$

$$p(x) = 2m\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{4z^2}\right) + m'.$$

Переход к полярным координатам в плоскости z дает:

$$z = r\exp(i\varphi),$$

$$a(x) = \frac{m^2}{16r^4},$$

$$p(x) = \frac{m}{2r^2}(4r^3\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1) + m'.$$

Отделяя действительную часть от мнимой в формуле для x

$$x = -z^2 - \frac{1}{z},$$

имеем

$$x = -r^2\cos 2\varphi - \frac{1}{r}\cos\varphi,$$

$$0 = -r^2\sin 2\varphi + \frac{1}{r}\sin\varphi.$$

Из второго уравнения находим две ветви: горизонтальную

$$\sin\varphi = 0$$

и вертикальную

$$-2r^2\cos\varphi + \frac{1}{r} = 0.$$

Эти ветви пересекаются в точке ветвления

$$\varphi_0 = 0, \quad 2r_0^3 = 1.$$

Вертикальная ветвь задается уравнением

$$2r^3\cos\varphi - 1 = 0,$$

имеет в точке ветвления вертикальную касательную и асимптотически приближается к оси ординат. Вычисление $|a(x)|$ и $p(x)$ дает

$$|a(x)| = \frac{m^2}{16r^4},$$

$$p(x) = \frac{m}{2r^2}(4r^3\cos\varphi + 2(\cos\varphi)^2 - 1) + m'.$$

Естественно положить на вертикальной ветви

$$m = r^2,$$

и тогда все нужные для оценок функции оказываются функциями только r, ибо тригонометрические функции можно исключить, так как из уравнения вертикальной ветви вытекает соотношение

$$\cos\varphi = \frac{1}{2r^3}.$$

В результате имеем

$$|a(x)| = \frac{1}{16}, \quad p(x) = \frac{1}{4}\frac{15r^6 + 6r^{12} + 2}{r^6(2 + r^6)}$$

и теперь нетрудно найти $p_v = \min\limits_x p(x)$. На горизонтальной ветви он равен значению $p(x)$ в точке ветвления – самой левой точке горизонтальной ветви

$$p_h = 1.5.$$

Так как

$$p = \min(p_v, p_h) = p_v = 1.082106781,$$

то окончательно для нулевого приближения

$$a = \frac{1}{16}, \quad p = 1.082106781$$

и, следовательно,

$$\theta = \frac{4a}{p^2} = 0.213500930.$$

Итерационный процесс сходится быстро, и уже третья итерация дает девять верных знаков:

$$\theta_0 = 0.213500930,$$
$$\theta_2 = 0.014282161,$$
$$\theta_3 = 0.000000000.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено разложение в ряд ограниченного на всей оси решения уравнения Риккати. Члены этого ряда суть ограниченные решения линейных уравнений. Ряд сходится абсолютно и равномерно на всей оси, причем сходимость ньютоновского типа – удвоение числа верных знаков на каждом шаге.

Рассмотрение в сообщении отличается от традиционного. Изучается уравнение Риккати [2], а не уравнение Штурма–Лиувилля. Ищется частное комплексное [9, 10], а не общее действительное решение. Строится сходящийся итерационный процесс, а не асимптотический ряд [6–8]. Нулевое приближение задается не в явной, а в параметрической форме. Нулевое приближение (следуя Максу Планку) строится в целом, а не локально.

Уравнение Эйри описывает границу геометрической оптики (в частности, поведение квантовой частицы [3–5] вблизи точки поворота).

Традиционно считается, что оценки по абсолютной величине типичны для релаксационных процессов. Для колебательных систем существенна интерференция, и поэтому мало шансов получить оценки по абсолютной величине. В этом сообщении показано, что можно тем не менее построить абсолютно и равномерно сходящийся итерационный процесс. Для этого надо выйти в комплексную область и выбрать разумное нулевое приближение.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 01–01–00893).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Riccati J.F.* Animadversiones in Aequationes Differentiales Secundi Gradus // Acta Eruditorum. 1723. P. 402–510; Actorum Eruditorum Supl. 1724. V. 8. P. 66–73.
2. *D'Alembert Jean Le Rond.* Equation $z' = \varphi(x)z$, $z(a) = z(b) = 0$, $y = z'/z$. 1763 Histoire de l'Academie de Berlin. 1770. V. 19. P. 224 et seq.
3. *Wentzel G.* // Z. Phys. 1926. Bd. 38. S. 518–529.
4. *Brillouin L.* // C.r. Acad. sci. A. 1926. V.183. P. 24–26.
5. *Kramers H.A.* // Z. Phys. 1926. Bd. 39. S. 828–840.
6. *Zwaan A.* // Arch. Neerlandaises. 1929. V. 12. P. 1–76.
7. *Birkhoff G.D.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. P. 681–700.
8. *Langer R.E.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. V. 40. P. 545–582.
9. *Молчанов А.М.* // ДАН. 1967. Т. 173. № 3. С. 519–522.
10. *Молчанов А.М.* Матричное уравнение Риккати. В сб.: Качественные методы теории нелинейных колебаний. Киев: Наук. думка, 1984. Т. 2.